ANALISANDO AS TÉCNICAS DE SOLUÇÃO POR QUADROS E O MÉTODO SIMPLEX QUANDO EMPREGADOS NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE TRANSPORTE DE UMA INDÚSTRIA DE PNEUS

[1] Simone Silva Frutuoso de Souza
Simone_mat@hotmail.com
[1] Fernando Parra dos Anjos Lima
engfernandoparra@gmail.com
[1] Mestrando (a) em Engenharia Elétrica – FEIS – UNESP – Ilha Solteira.
[2] Rubén Romero
ruben@dee.feis.unesp.br
[2] Carlos Roberto Minussi
Minussi@dee.feis.unesp.br
[2] Professor Titular – DEE – FEIS – UNESP – Ilha Solteira.

RESUMO

Este artigo tem por objetivo apresentar um método de resolução alternativo para o problema de transporte de uma indústria de pneus, modelado em programação linear (PL), sendo que o método comumente empregado para solucionar este problema é o método simplex. Faz-se também uma análise entre as duas maneiras de solução.

Palavras-chaves: Problema de Transporte, Programação linear, Solução alternativa.

ABSTRACT

This article aims to present an alternative method of solving the problem of transporting a tire industry, modeled on linear programming (LP), and the method commonly employed to solve this problem is the simplex method. It is also a relationship between two ways of solution.

Key-words: *Transport Problem, linear programming, alternative solution.*

1. INTRODUÇÃO

O problema de transporte é talvez o mais representativo dos problemas de programação linear. É um problema de grande aplicação prática, tendo sido estudado por vários investigadores, embora tenha sido Dantzig o primeiro a estabelecer a sua formulação em PL e a propor um método sistemático de resolução além de ser o criador do método simplex. (DANTZIG, 1953 – 1963), (CANAVARRO, 2005).

O objetivo geral do problema de transporte consiste em determinar a forma mais eficiente, isto é, mais econômica de enviar um bem disponível em quantidades limitadas em determinados locais para outros onde seja necessário, com o menor custo. Como qualquer problema de PL este pode ser resolvido pelo método simplex, porém a sua estrutura particular, permite a utilização de métodos que embora sejam derivados do simplex, são mais eficientes em agilidade e praticidade, como citado por Dantzig em (DANTZIG, 1963).

Então de forma generalizada a resolução de um problema de transporte envolve basicamente três etapas: a 1ª consiste em encontrar uma solução básica inicial; na 2ª procede-se ao teste para verificar se essa solução é ótima ou não; finalmente esta fase consiste na passagem desta solução a outra melhor, caso exista evidentemente. (CANAVARRO, 2005).

Neste artigo adota-se como problema de pesquisa o problema de logística e transporte de uma indústria de pneus, onde o objetivo é encontrar a melhor maneira de distribuir as peças produzidas para os locais de armazenamento, com o menor custo operacional possível. Além de realizar esta abordagem modelando este problema em programação linear, também faz-se a resolução com os dois métodos de otimização, visando realizar uma análise comparativa entre os mesmo e apresentar os aspectos positivos e negativos observados na solução de cada um dos métodos na resolução deste problema em específico. Para evidenciar esta comparação a análise foi dividida em duas etapas, onde considerou-se os resultados obtidos pela resolução dos métodos computacionalmente na linguagem MATLAB, e os resultados obtidos pela resolução realizada algebricamente, pois neste caso o problema é de tamanho pequeno e possibilita esta comparação.

Assim, por conseguinte este trabalho esta composto por cinco seções, na seção um que é está em questão faz-se uma introdução do que será abordado pelo artigo, na seção dois apresentam-se os aspectos teóricos sobre o problema de transporte, na sequência a seção três apresenta a metodologia utilizada para solucionar o problema, neste caso a descrição teórica dos métodos e seus respectivos algoritmos, na seção quatro são apresentados os resultados, e a análise realizada em relação ao desempenho dos métodos, e por último na seção cinco apresenta-se a conclusão final sobre o artigo e perspectivas para trabalhos futuros.

2. CONCEITOS TEÓRICOS

2.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE TRANSPORTE

O problema clássico de transporte surge como necessidade de programar a distribuição ótima de um produto que: (DANTZIG, 1953 – 1963).

1. Se encontra disponível em *m* origens nas quantidades fixas $a_i > 0$ (oferta), com i=1,2,...,m.
2. É necessário em *n* destinos nas quantidades fixas $b_j > 0$ (procura), com j=1,2,...,n;
3. Deve ser enviado diretamente para os destinos, esgotando as disponibilidades em cada origem e satisfazendo as necessidades em cada destino, isto é, a procura total iguala a oferta total;

E tendo por objetivo a minimização do custo total envolvido no programa de distribuição desse produto, em que se supõe que os custos unitários de transporte de cada origem para cada destino c_{ij}, são independentes das quantidades transportadas x_{ij}. A seguir a Figura 1 ilustra o problema de transporte: (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008).

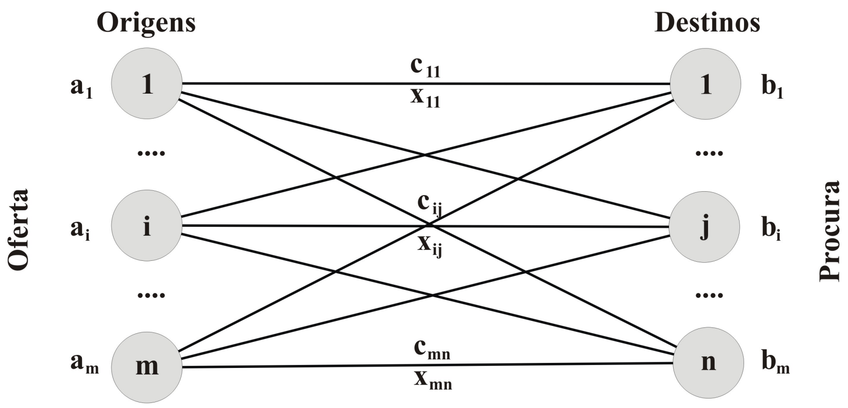

Figura 1: Problema de transporte.

Esta figura ilustra o problema de transporte sobre forma de uma rede com *m* origens e *n* destinos representados por nós, as arestas que ligam as origens aos destinos representam os percursos através dos quais os produtos podem ser transportados.

Na Tabela 1 pode-se observar que em cada linha está à informação relativa a uma origem, e cada coluna a um destino. A última coluna contém informação relativa às quantidades disponíveis nas origens e a última linha contém informação referente às quantidades necessárias nos destinos. Em cada quadrícula (i,j), encontra-se a quantidade à ser transportada da origem *i* para o destino *j*, ou seja, é o caminho que é representando por x_{ij}, e o custo unitário correspondente para o transporte, representado por c_{ij}.

Para qualquer plano de transporte admissível a soma em linha dos x_{ij} iguala-se a quantidade a_i, $\sum_j x_{ij} = a_i$ e a soma dos x_{ij} iguala a quantidade b_j, $\sum_i x_{ij} = b_j$. O custo do percurso (i,j) é dado pela relação ($C_{ij}\, x_{ij}$), e o custo total do plano de transporte é dado por $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$.

Tabela 1: Quadro do problema de transporte. (PERIN, 2001), (GOLDBARG e LUNA, 2000).

Destino / Origem	**1**	**2**	**...**	**n**	**Oferta**
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	**...**	C_{1n} X_{1n}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	**...**	C_{2n} X_{2n}	a_2
...	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**
m	C_m X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	**...**	C_{mn} X_{mn}	a_m
Procura	b_1	b_2	**...**	b_n	$\sum a_i = \sum b_i$

Então segundo Gallego, (2003), a formalização matemática do problema de transporte como problema de programação linear é proposta pelo seguinte modelo: (GALLEGO, ROMERO e ZULUAGA, 2003).

$$\text{Minimizar } z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

Sujeito a

$$\sum_j x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (2)$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, ..., m) \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., n;\ j = 1,2, ...,m) \qquad (4)$$

Onde (1) representa o objetivo do problema, que é a minimização do custo operacional para todo o plano de transporte. Na equação (2) tem-se a restrição de oferta, e em (3) tem-se a restrição de procura. Em (4) temos a restrição de não negatividade.

2.2 PROPRIEDADES DOS PROBLEMAS DE TRANSPORTES

Devido à sua estrutura particular, o problema de transporte tem algumas propriedades, como encontrado em Canavarro, (2005), e em Bazarra, (1990-1993).

- Teorema I: O problema de transporte tem sempre solução ótima (finita).
- Teorema II: Qualquer solução básica admissível do problema de transporte tem no máximo ($m+n-1$) variáveis positivas.
- Teorema III: A matriz da base de qualquer SBF do problema de transporte é triangular.
- Teorema IV: Se a_{ij} *e* b_{ij} com $i = 1,2,...,m$ *e* $j = 1,2,...,n$, são inteiros, então qualquer solução básica admissível tem apenas valores inteiros.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 MÉTODO PRIMAL SIMPLEX

O método simplex desenvolvido por Dantzig (1953) refere-se a um problema de Programação Linear de minimização. Este método tem por objetivo resolver um problema linear trazendo como resposta a melhor solução cabível para o contexto do problema.

O método simplex resolve problemas com a seguinte característica:

$$\text{Minimizar} \quad Z = Cx \tag{5}$$

Sujeito a

$$\left.\begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \Leftarrow S \tag{6}$$

Onde a variável x é um ponto extremo de *S*, e cada ponto extremo representa uma solução do problema linear.

Assim para resolver-se um problema necessita-se de uma solução básica viável inicial, a qual é um dos pontos extremos. Este método verifica se a presente solução é ótima. Se esta não for é porque um dos demais pontos extremos adjacentes (vértice) fornece um valor menor para a função objetivo do que a atual, quando o problema considerado é de minimização. Ele então faz uma mudança de vértice na direção que mais diminua a função objetivo e verifica se este novo vértice é ótimo. O processo termina quando estando num ponto extremo, todos os outros pontos extremos adjacentes fornecem valores maiores para a função objetivo.

Portanto, a troca de vértice, faz uma variável não básica crescer (assumir valor positivo) ao mesmo tempo em que zera uma variável básica (para possibilitar a troca) conservando a factibilidade do Problema de Programação Linear. Para isso, escolhemos uma variável, cujo custo relativo é mais negativo (não é regra geral), para entrar na base, e as trocas de vértices são feitas até que não exista mais nenhum custo relativo negativo. A variável que sairá da base é aquela que ao se anular garante que as demais continuem maiores ou iguais a zero, quando aumentamos o valor da variável que entra na base (respeitando a factibilidade). (BAZARRA, 1990).

O algoritmo do método primal simplex compreende-se nos seguintes passos:

i) Achar uma solução factível básica inicial;

ii) Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare. Caso contrário, siga para o passo iii.

iii) Determinar a variável não básica que deve entrar na base;

iv) Determinar a variável básica que deve sair da base;

v) Atualizar o sistema à fim de determinar a nova solução factível básica, e voltar ao passo ii.

A seguir na Figura 2 apresenta-se o diagrama de blocos do algoritmo do método primal simplex. (GALLEGO, ROMERO e ZULUAGA, 2003).

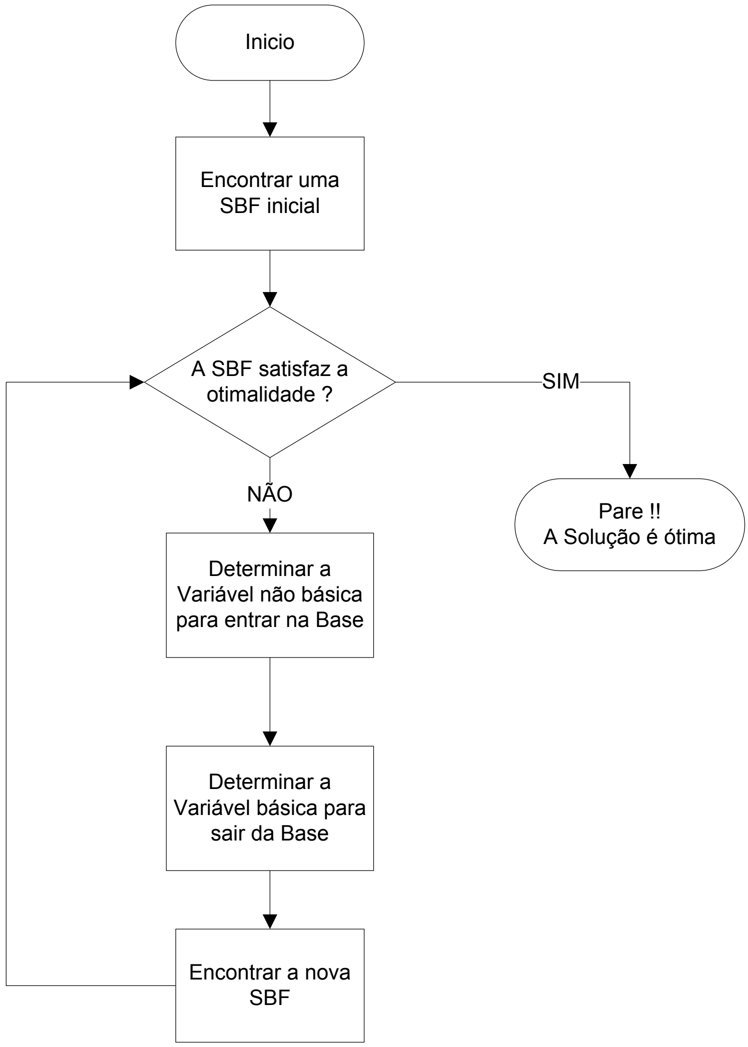

Figura 2: Algoritmo do método simplex.

3.2 MÉTODO PRIMAL SIMPLEX DE DUAS FASES

Nos problemas onde as restrições são do tipo "≤" (menor ou igual) é sempre possível obtermos uma submatriz (identidade) com o auxilio das variáveis de folga, e assim a solução inicial é óbvia.

Porém, quando não temos uma solução inicial óbvia, ou seja, não conseguimos uma submatriz base (identidade) necessitamos de um procedimento para desenvolvê-la. Isto ocorre quando o problema de Programação Linear tiver restrições de "=" (igualdade) e ou restrições do tipo "≥" (maior ou igual). (GALLEGO, ROMERO e ZULUAGA, 2003), (BAZARRA, 1993).

Portanto, não temos solução inicial óbvia. Como obter a solução inicial?

Para resolvê-lo usamos um procedimento chamado Fase I do Método Simplex, que consiste em explorar um problema auxiliar, equivalente ao problema de programação linear inicial, com região factível ampliada. Introduzimos no problema de programação linear (já na forma padrão) variáveis artificiais nas restrições do tipo “=“ e “$\geq$”. Então obtemos a seguinte formulação para a Fase I: (BAZARRA, 1993).

$$\text{Minimizar } x_0 = \sum_k x_k \tag{7}$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} &Ax + Ix_a = b \\ &x \geq 0 \\ &x_a \geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Onde x_a é a variável artificial, e proporciona a matriz identidade I como base. Este problema linear é denominado relaxado ou artificial, e ele permite que uma solução inicial seja óbvia.

A Fase II do problema linear termina quando as variáveis artificiais $x_a = 0$, portanto as variáveis artificiais terão saído da base *B*. Então a partir da SBF encontrada pela Fase I, exclui-se tudo que é do problema relaxado, ou artificial e continua-se a resolver o problema no ponto extremo em que o problema parou, e esta é a Fase II, onde se encontra a solução do problema linear. Então temos a seguinte formulação na Fase II: (BAZARRA, 1993).

$$\text{Minimizar } Z(x) = C_B x_B + C_N x_N \tag{9}$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} &x_B = B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ &x_B \geq 0 \\ &x_N \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Na Figura 3 apresenta-se o diagrama de blocos do algoritmo do método primal simplex de duas fases. (PERIN, 2001).

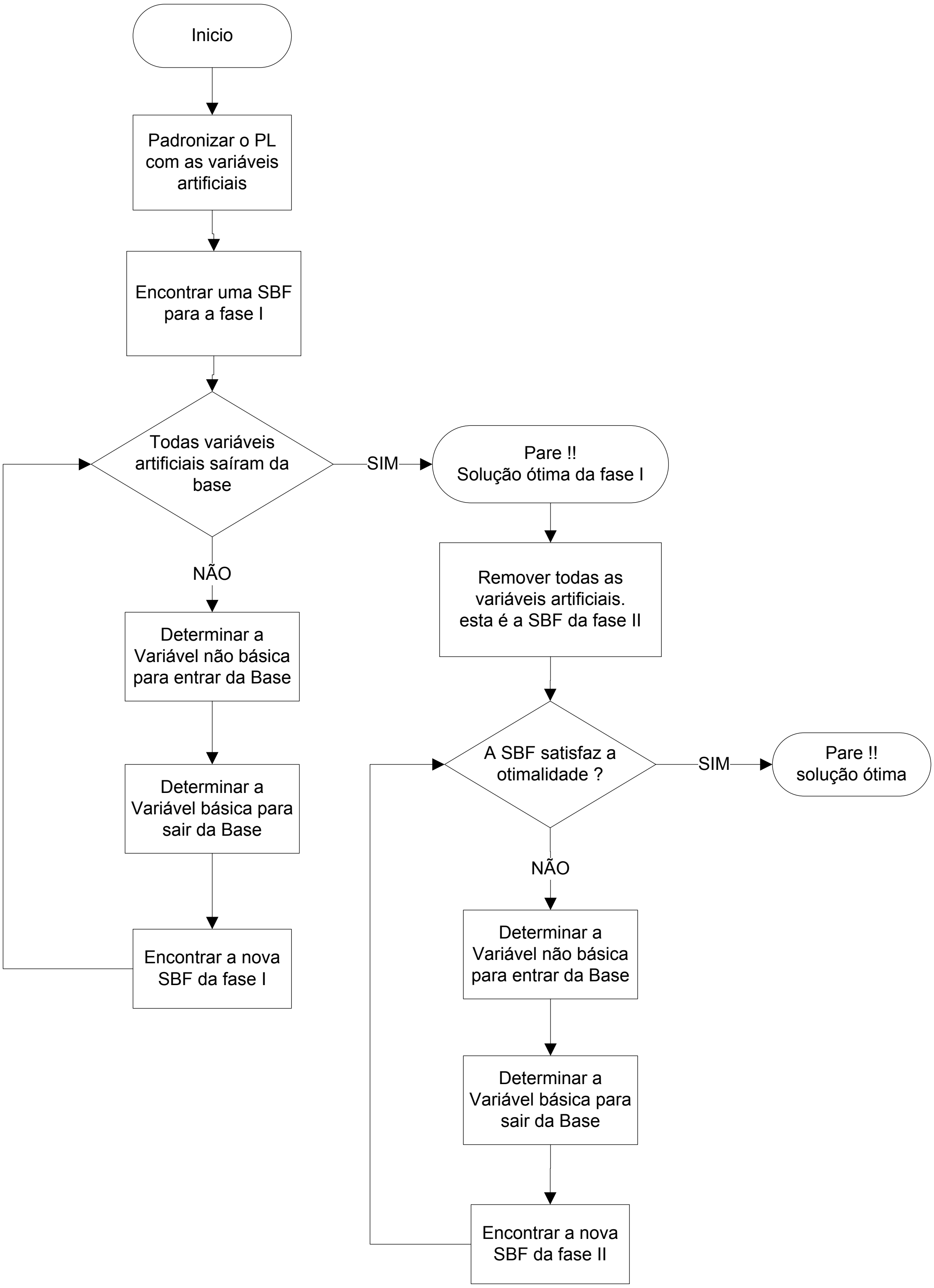

Figura 3: algoritmo do método simplex de duas fases.

O algoritmo apresentado na Figura 3 pode ser resumido em dois passos, que são os seguintes: (BAZARRA, 1990-1993).

- Fase I: Considera-se o Problema de Programação Linear (PPL) original relaxado pela introdução das variáveis artificiais e aplica-se o algoritmo de resolução até atingir a solução ótima do PPL relaxado, quando as variáveis artificiais $x_a = 0$, assim Fase II. Caso contrário não consiga chegar em $x_a = 0$, pare este problema é infactível;
- Fase II: Nesta fase, agora com uma solução inicial para o PPL original, é verificado, inicialmente, se o custo relativo desta solução é maior ou igual à zero. Se for, pare, a solução atual é ótima. Caso contrário continue aplicando o algoritmo até encontrar a solução ótima.

3.3 MÉTODO DE RESOLUÇÃO POR QUADROS

O método de resolução por quadros é um método derivado do método simplex aplicado ao problema de transporte, portanto tem mais agilidade e praticidade na maneira de resolver um problema de programação linear de transporte. (SHEFFI, 1985).

Considerando-se que o problema está em forma de quadro, como apresentado na seção 2.1, o algoritmo deste método consiste-se nos seguintes passos:

- Passo I: Obtenção de uma SBF inicial, que pode ser feita por três métodos, onde tem-se o método do canto superior esquerdo, ou Método do canto N-W; o método do mínimo da matriz de custos; e o método de vogel. Neste trabalho optou-se por trabalhar com o método do canto superior esquerdo. (CANAVARRO, 2005), (PERIN, 2001).
- Passo II: Teste de otimalidade. Se a SBF em presença satisfaz o critério de ótimo, o processo termina, caso contrário, passa-se ao passo III. Este teste é realizado pelo método de Dantzig, e caso não seja ótimo, a variável a entrar na base é escolhida. (DANTZIG, 1953), (EDMONDS e KARP, 1972).
- Passo III: Melhoria da solução. Cálculo de nova SBF através da introdução na base de uma variável não básica em substituição de uma variável básica. Calcula-se a nova solução e volta-se ao passo II. A escolha da variável para sair da base é feita pelo método Stepping Stone. (KENNINGTON e HELGASON, 1988), (CANAVARRO, 2005).

A Seguir serão apresentados os passos de algoritmo do método de resolução por quadros em forma de diagrama de blocos. Os passos serão apresentados separados, pois, cada passo é realizado por um método diferente.

3.3.1 MÉTODO DO CANTO SUPERIOR ESQUERDO

Este método representa o Passo I, e a função dele é encontrar a SBF inicial. O seu algoritmo esta apresentado na Figura 4. (CANAVARRO, 2005), (PERIN, 2001).

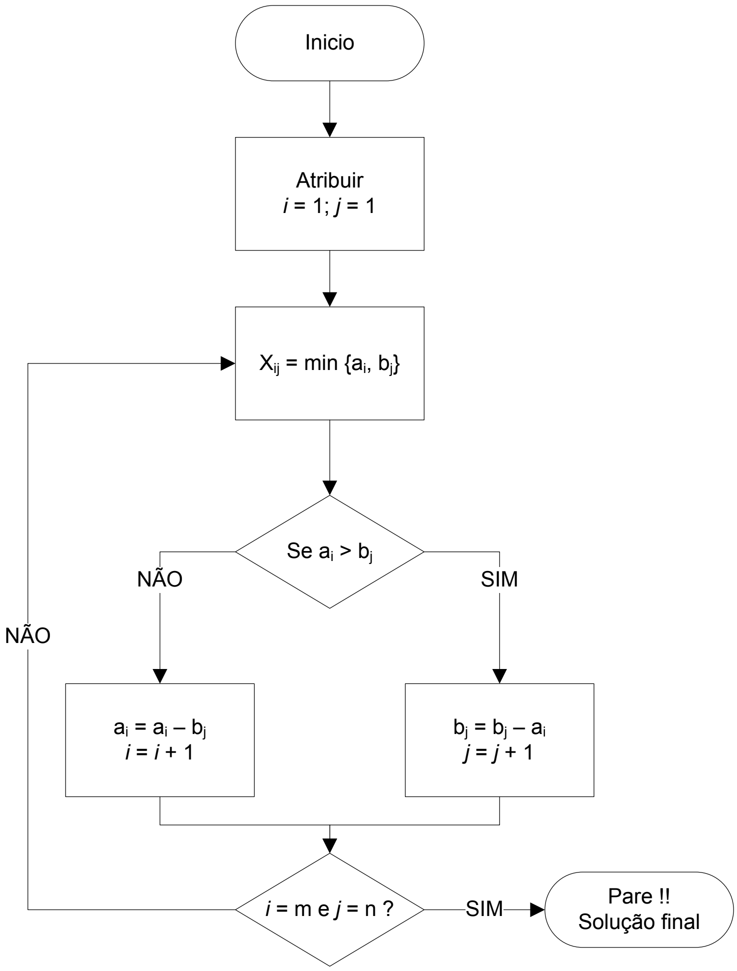

Figura 4: Algoritmo do método do canto superior esquerdo.

3.3.2 MÉTODO DE DANTZIG

Este método representa o Passo II, e a função dele é realizar o teste de otimalidade, e caso a SBF não seja ótima apontar uma variável para entrar na base. O seu algoritmo esta apresentado na Figura 5. (DANTZIG, 1953), (EDMONDS e KARP, 1972).

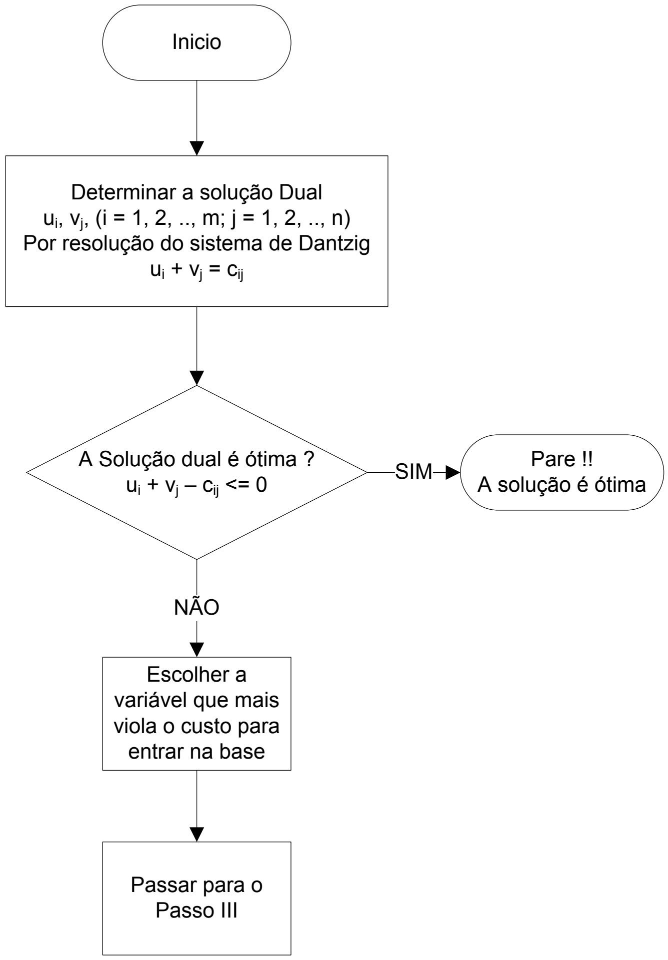

Figura 5: Algoritmo do método de Dantzig.

3.3.3 MÉTODO STEPPING STONE

Este método representa o Passo III, e a função dele é apontar uma variável para sair da base. O seu algoritmo esta apresentado na Figura 6. (KENNINGTON e HELGASON, 1988), (CANAVARRO, 2005).

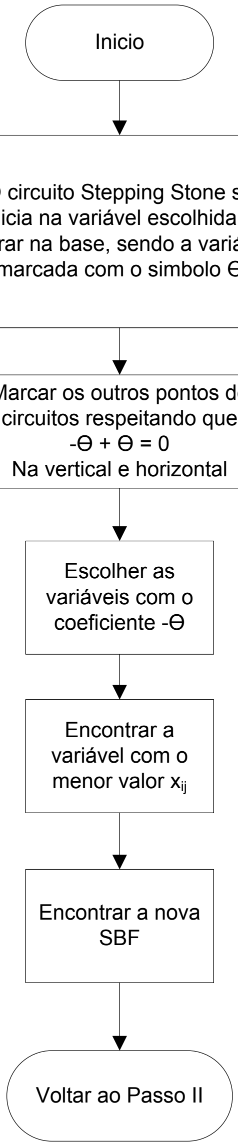

Figura 5: Algoritmo do método Stepping Stone.

Após a execução do algoritmo descrito nos passos anteriores, o método de resolução por quadros encontra a solução ótima do problema linear.

3.4 O PROBLEMA DE PESQUISA

Para este trabalho propõe-se a resolução do problema de transporte de uma indústria de pneus através dos dois métodos e assim faz-se uma análise comparativa entre os resultados obtidos pelos mesmos. O problema de transporte utilizado neste trabalho tem a seguinte descrição:

Uma indústria de Pneus tem duas fábricas, a fábrica 1 e a fábrica 2 com produções de 800 e 1200 peças de pneus por mês, Esta produção é armazenada em deposito de vendas, o deposito 1, deposito 2 e deposito 3, que tem capacidade de armazenamento mensal de 750, 920 e 330 peças de pneus respectivamente. Os custos para o transporte destas peças para os depósitos estão expressos na Tabela 2. O custo operacional gasto com o transporte das peças produzidas antes de aplicar este estudo era de R$ 32.900,00 em média por mês, então o objetivo é reduzir este custo e encontrar a melhor solução para este problema de transporte.

Tabela 2: Custos para o Problema de transporte de pneus.

	Depósitos		
Fábricas	1	2	3
1	15	10	8
2	13	9	20

Modelagem do problema

Variável do problema: $x_{ij}\begin{cases} i \rightarrow \textit{fábricas}, i = 1,2 \\ j \rightarrow \textit{depósitos}, j = 1,2,3 \end{cases}$ (11)

$$\text{PL} = \begin{cases} \min z(x) = 15x_{11} + 10x_{12} + 8x_{13} + 13x_{21} + 9x_{22} + 20x_{23} \\ s.a. \\ \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 800 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1200 \end{array}\right\} \text{Restrição de Produção} \\ \\ \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} = 750 \\ x_{12} + x_{22} = 920 \\ x_{13} + x_{23} = 330 \end{array}\right\} \text{Restrição de Produção} \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

3.5 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA PELO MÉTODO SIMPLEX

Como o problema é de igualdade utiliza-se o método simplex de duas fases. (GALLEGO, 2003). Assim padroniza-se o problema da seguinte forma:

$$\text{PL} = \begin{cases} \min z(x) = 15x_{11} + 10x_{12} + 8x_{13} + 13x_{21} + 9x_{22} + 20x_{23} \\ s.a. \\ \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + S_1 = 800 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + S_2 = 1200 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + S_3 = 750 \\ x_{12} + x_{22} + S_4 = 920 \\ x_{13} + x_{23} + S_5 = 330 \end{array}\right\} \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 \geq 0 \end{cases} \tag{13}$$

Onde as variáveis S_1, S_2, S_3. S_4 e S_5 são variáveis artificiais, variáveis as quais possibilitam o problema ter uma base ótima (identidade).

Calculando as componentes do Quadro Simplex

Elementos da Fase I:

$C'_B = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$ $\qquad C'_N = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

$\overline{C'_N} = C'_B B^{-1} N - C'N = [2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2]$ $\qquad C'_B B^{-1} b = [4000]$

Elementos da Fase II:

$C_B = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ $\qquad C_N = [15 \quad 10 \quad 8 \quad 13 \quad 9 \quad 20]$

$\overline{C_N} = C_B B^{-1} N - CN = [-15 \quad -10 \quad -8 \quad -13 \quad -9 \quad -20]$ $\qquad C_B B^{-1} b = [0]$

Fase I: Quadro Inicial

	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	*RHS*
X_0	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	4000
S_1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	800
S_2	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1200
S_3	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	750
S_4	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	920
S_5	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	330

	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	*RHS*
X_0	0	2	2	0	2	2	0	0	-2	0	0	2500

S_1	0	1	1	-1	0	0	1	0	-1	0	0	50
S_2	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1200
X_{11}	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	750
S_4	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	920
S_5	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	330
X_0	0	0	0	2	2	2	-2	0	0	0	0	2400
X_{12}	0	1	1	-1	0	0	1	0	-1	0	0	50
S_2	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1200
X_{11}	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	750
S_4	0	0	-1	1	1	0	-1	0	1	1	0	870
S_5	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	330
X_0	-2	0	0	0	2	2	-2	0	-2	0	0	900
X_{12}	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	800
S_2	-1	0	0	0	1	1	0	1	-1	0	0	800
X_{21}	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	750
S_4	-1	0	-1	0	1	0	-1	0	0	1	0	120
S_5	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	330
X_0	0	0	2	0	0	2	0	0	-2	-2	0	660
X_{12}	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	800
S_2	0	0	1	0	0	1	1	1	-1	-1	0	330
X_{21}	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	750
X_{22}	-1	0	-1	0	1	0	-1	0	0	1	0	120
S_5	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	330
X_0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	0	0	0	0
X_{12}	1	1	0	0	0	-1	0	-1	1	1	0	470
X_{13}	0	0	1	0	0	1	1	1	-1	-1	0	330
X_{21}	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	750
X_{22}	-1	0	0	0	1	1	0	1	-1	0	0	450
S_5	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	1	1	0

Fim da Fase I. Eliminam-se todas as variáveis artificiais, e inicia-se a Fase II.

Fase II: Quadro Inicial

	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	RHS
Z	-1	0	0	0	0	-13	21140

X_{12}	1	1	0	0	0	-1	470
X_{13}	0	0	1	0	0	1	330
X_{21}	1	0	0	1	0	0	750
X_{22}	-1	0	0	0	1	1	450
S_5	0	0	0	0	0	0	0

$$\text{Solução Ótima} = \begin{cases} Z(x) = 21140 \\ X_{11} = 0 \qquad X_{13} = 330 \qquad X_{22} = 450 \\ X_{12} = 470 \qquad X_{21} = 750 \qquad X_{23} = 0 \end{cases}$$

3.6 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA PELO MÉTODO DE RESOLUÇÃO POR QUADROS

Para resolver o problema é necessário transformá-lo na forma de quadro, como realizado a seguir:

Destino / Origem	1	2	3	Oferta
1	**15** $\mathbf{X_{11}}$	**10** $\mathbf{X_{12}}$	**8** $\mathbf{X_{13}}$	**800**
2	**13** $\mathbf{X_{21}}$	**9** $\mathbf{X_{22}}$	**20** $\mathbf{X_{23}}$	**1200**
Procura	**750**	**920**	**330**	**2000**

Passo I: Obtenção de uma solução inicial pelo método do canto superior esquerdo

750	50	\	$\cancel{800}$ $\cancel{50}$
\	870	330	$\cancel{1200}$ $\cancel{330}$
$\cancel{750}$	$\cancel{920}$ $\cancel{870}$	$\cancel{330}$	

1º $mim\{800{,}750\} = 750$

2º $mim\{50{,}920\} = 50$

3º $mim\{1200{,}870\} = 870$

4º $mim\{330{,}330\} = 330$

$Z(x) = 26180$

Passo II: Teste de Ótimo (Método de Dantzig)

U \ V	15	10	21
0	**15**	**10**	21
-1	14	**9**	**20**

$X_{13} = 21 > 8 \rightarrow viola$

$X_{21} = 14 > 13 \rightarrow viola$

$\max\{21 - 8; 14 - 13\} = 13 = X_{13}$

Portanto X_{13} Entra na Base

Passo III: Identificando a variável para sair da base (Método Stepping Stone)

750	**50**	θ
	870	**330**

750	**50-** θ	θ
	870+ θ	**330-** θ

$mim\{50;330\} = 50 = X_{12}$

Portanto X_{12} Sai da Base

Nova Solução

750		**50**	8$\cancel{0}$0
	920	**330**	1$\cancel{2}$00
$\cancel{7}$50	9$\cancel{2}$0	$\cancel{3}$30	

$Z(x) = 25530$

Passo II: Teste de Ótimo (Método de Dantzig)

U \ V	15	-3	8
0	**15**	-3	**8**
12	27	**9**	**20**

$X_{12} = -3 < 10 \rightarrow não$

$X_{21} = 27 > 13 \rightarrow viola$

Portanto X_{21} Entra na Base

Passo III: Identificando a variável para sair da base (Método Stepping Stone)

750		**50**
θ	**920**	**280**

750- θ		**50+** θ
θ	**920**	**280-** θ

$mim\{750;280\} = 280 = X_{23}$

Portanto X_{23} Sai da Base

Nova Solução

470		**330**	$8\cancel{0}0$
280	**920**		$1\cancel{2}00$
$\cancel{7}50$	$\cancel{9}20$	$\cancel{3}30$	

$Z(x) = 21610$

Passo II: Teste de Ótimo (Método de Dantzig)

U \ V	7	3	0
0	**15**	11	**8**
12	**13**	**9**	6

$X_{12} = 11 > 10 \rightarrow viola$

$X_{23} = 6 < 20 \rightarrow não$

Portanto X_{12} Entra na Base

Passo III: Identificando a variável para sair da base (Método Stepping Stone)

470	θ	**330**
280	**920**	

470-θ	θ	**330**
280+θ	**920-θ**	

$mim\{470;920\} = 470 = X_{11}$

Portanto X_{11} Sai da Base

Nova Solução

	470	**330**	$8\cancel{0}0$
750	**450**		$1\cancel{2}00$
$\cancel{7}50$	$\cancel{9}20$	$\cancel{3}30$	

$Z(x) = 21140$

Passo II: Teste de Ótimo (Método de Dantzig)

U \ V	4	0	-2
10	14	**10**	**8**
9	**13**	**9**	7

$X_{11} = 14 < 15 \rightarrow não$

$X_{23} = 7 < 20 \rightarrow não$

Portanto a ultima solução encontrada é a Solução Ótima do problema.

$$\text{Solução Ótima} = \begin{cases} Z(x) = 21140 \\ X_{11} = 0 \qquad X_{13} = 330 \qquad X_{22} = 450 \\ X_{12} = 470 \qquad X_{21} = 750 \qquad X_{23} = 0 \end{cases}$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como se podem observar os dois métodos trabalhados de forma algébrica resolvem o problema de transporte e chegam ao mesmo resultado, minimizando o custo operacional de

R$ 32.900,00 mensais para R$ 21.140,00 mensais. Além de resolver o problema algebricamente os métodos foram implementados computacionalmente em MATLAB e o resultado é apresentado a seguir:

Tabela 3: Resultado dos métodos implementados computacionalmente.

Método	Tempo computacional	Iterações	Solução ótima
Simplex	1,195 Segundos	7	21140
Quadros	0,947 Segundos	4	21140

Os resultados dos métodos computacionais foram obtidos a partir de um PC AMD Turion II Triple core 2.4 GHz, 6 GB de Memória RAM, e sistema operacional Windows 7 Ultimate.

Através dos resultados obtidos na resolução do problema de pesquisa proposto por este artigo é possível fazer uma análise dos dois métodos empregados, levando em conta a resolução algébrica e computacional.

De acordo com os resultados obtidos algebricamente observa-se que o método de resolução por quadros simplifica a resolução, tornando-a mais ágil e prática, ao contrário do que pode-se observar na resolução pelo método simplex, onde é necessário fazer operações com matrizes, o que não é tão ágil e prático.

Os resultados obtidos computacionalmente mostram que o método de resolução por quadros tem um tempo computacional menor que o método simplex, e também o número de iterações, porém a diferença é pequena. Atualmente com a evolução da informática observa-se que tanto um método quando o outro é capaz de resolver o problema rapidamente, pelo fato de existir computadores com altos índices de processamento.

De forma geral o método de resolução por quadros teve desempenho computacional e algébrico melhor para o problema pesquisa proposto, porém o método simplex é uma ferramenta robusta que pode resolver qualquer tipo de problema linear. Neste caso em específico de um problema de transporte o método de resolução por quadros tem um comportamento mais favorável, fazendo que a resolução tenha um índice de complexidade menor que a do método simplex.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi possível apresentar uma solução alternativa para o problema de transporte, problema clássico e com grandes aplicações na área de programação linear. Além disso, fazer uma análise entre os dois métodos de resolução para investigar qual tem melhor praticidade e agilidade na resolução do problema de transporte.

Observa-se que o objetivo inicial de minimizar os custos operacionais de transporte da indústria de pneus foi cumprido, e os resultados foram satisfatórios. O custo inicial de R$ 32.900,00 ao mês foi reduzido para R$ 21.140,00 ao mês. Uma quantia significativa de R$ 11.760,00 ao mês foi economizada com os custos de transporte e proporcionou a indústria muitos benefícios.

Outro objetivo do trabalho era analisar o desempenho das técnicas de resolução do problema linear, e com os resultados obtidos observa-se que a resolução do problema de transporte da indústria de pneus com os dois métodos, é realizada de maneira mais ágil e prática com o método de resolução por quadros, onde a complexidade é muito menor em relação à resolução do método simplex.

O uso do método simplex é muito comum para resolver qualquer tipo de problema de programação linear, porém este trabalho apresentou um método diferente para encontrar a mesma solução do problema de transporte resolvido com o método simplex com uma praticidade maior e principalmente com menor custo computacional.

Os dois métodos analisados neste artigo tem um grau de precisão e eficiência indiscutível, pois, os dois métodos encontraram de maneiras diferentes, mais de forma eficiente a solução ótima deste problema linear. Porém para solução do problema de transporte em programação linear, os autores aconselham o uso do método de resolução por quadros, onde é possível obter agilidade, praticidade sem muita complexidade, no entanto independente de qual técnica é adotada como escolha de resolução o objetivo de reduzir os custos operacionais de transporte de uma indústria de pneus foram atingido.

Pretende-se como perspectivas para trabalhos futuros aplicar os dois métodos apresentados neste artigo em um problema com dimensão maior, onde seja possível observar o desempenho computacional, e assim realizar uma comparação entre os métodos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus, as nossas famílias, e por fim um especial agradecimento a CAPES e CNPq pelo apoio (concessão de bolsa de Mestrado). Agradecemos os comentários dos revisores anônimos.

REFERÊNCIAS

BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. **linear programming: theory and algoritms**, 2º Ed – Nova Iorque – Wiley – 1993.

BAZARAA M.S., JARVIS J.J., SHERALI H. D. **Linear Programming and Network Flows**, 2º Ed – John Wiley & Sons – 1990.

CANAVARRO, C. **Apostila de programação linear: problema de transporte,** Instituto politécnico de castelo branco – 2005.

DANTZIG, G. **Notes on linear programming**. RAND Corporation – 1953.

DANTZIG, G. **Linear programming and extensions,** Princeton University Press e RAND Corporation – 1963.

EDMONDS,J. E KARP, R.M. **Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems**, J.ACM 19 ,pp248-264, 1972.

GALLEGO, R. A.; ROMERO, R.; ZULUAGA, A. H. E. **Optimizacion em sistemas elétricos I: programación linear**, 1º Ed – Universidad tecnológica de Pereira – Colômbia – 2003.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para Engenheiros e Cientistas**, Porto Alegre – Bookman – 2008.

GOLDBARG, M.; LUNA, H. P. L. **Otimização Combinatória e Programação Linear**, Campus – 2000.

KENNINGTON J. L., HELGASON R.V. **Algorithms for Network Programming.** John Wiley & Sons - 1988.

PERIN, C. **Introdução à Programação Linear**. Coleção Imecc – V.2 – Campinas – Universidade Estadual de Campinas – 2001.

SHEFFI Y. **Urban Transportation Network: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Models.** Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J – 1985.