Revista de Educação, Ciência e Cultura (ISSN22236-6377)

http://revistas.unilasalle.edu.br/index.php/Educacao

Canoas, v. 23, n. 1, 2018

http://dx.doi.org/10.18316/recc.v23i1.4192

A atividade matemática escolar como introdução de paradigmas na linguagem

The school mathematical activity as an introduction of paradigms in language

Cristiane Maria Cornelia Gottschalk[1]

Resumo: De uma perspectiva wittgensteiniana, este artigo parte do pressuposto de que o uso que fazemos de nossos enunciados matemáticos é de natureza diferente das hipóteses das ciências naturais, as quais têm um uso predominantemente referencial. Enquanto estas têm uma finalidade explicativa e descritiva, os objetos da matemática e suas relações expressas através de axiomas e teoremas desempenham um papel normativo. Em contraposição a uma concepção referencial do conhecimento matemático, tem-se como objetivo mostrar a importância desta distinção para a atividade matemática no contexto escolar, desde o nível mais elementar de introdução de paradigmas em jogos de linguagem preparatórios, até o nível mais complexo de suas demonstrações, que, por sua vez, produzem novos paradigmas. Conclui-se que determinadas interpretações dos enunciados matemáticos advindas de uma concepção referencial da linguagem matemática podem conduzir a imagens dogmáticas, acarretando diversos equívocos em suas práticas pedagógicas, em particular, quando estas se ancoram em teorias mentalistas ou empiristas do significado.

Palavras-chave: Paradigma; Ensino de Matemática; Linguagem Matemática; Wittgenstein.

Abstract: From a Wittgensteinian perspective, this article assumes that the use we make of our mathematical statements is of a different nature from the hypotheses of the natural sciences, which have a predominantly referential use. While these have an explanatory and descriptive purpose, the objects of mathematics and their relations expressed through axioms and theorems play a normative role. In contrast to a referential conception of mathematical knowledge, my goal is to show the importance of this distinction for the mathematical activity in the school context, from the most elementary level of introduction of paradigms in preparatory language games, to the most complex level of their demonstrations, which in turn produce new paradigms. I conclude that certain interpretations of mathematical statements coming from a referential conception of mathematical language can lead to dogmatic images, causing several misunderstandings in their pedagogical practices, particularly when they are anchored in mentalist or empiricist theories of meaning.

Keywords: Paradigm; Mathematics Teaching; Mathematical Language; Wittgenstein.

> *Dois homens que vivem em paz entre si e três homens que vivem em paz entre si não fazem cinco homens que vivem em paz entre si. Mas isso não significa que 2 + 3 não seja mais 5; é apenas que a adição não pode ser aplicada dessa maneira.* (WITTGENSTEIN[2])

Por dois pontos só é possível traçar uma única reta? Façamos um experimento de pensamento. Um professor desenha dois pontos na lousa e pede a um aluno (que está começando a aprender geometria) que

---

[1] Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo – USP. Professora do Departamento de Filosofia da Educação e Ciências da Educação, na área de Filosofia da Educação. E-mail: crisgott@usp.br

[2] In: *Gramática Filosófica*. São Paulo: Edições Loyola, 2003. As outras obras de Wittgenstein presentes neste texto serão abreviadas da seguinte forma: *Investigações Filosóficas* (IF), *Da Certeza* (DC), *Fichas* (F) e *Observações sobre os Fundamentos da Matemática* (OFM). Nestas obras, citaremos apenas os números dos parágrafos, e não das páginas, para facilitar ao leitor que as possui em outras edições.

trace uma reta passando por eles. Podemos imaginar facilmente que o aluno imediatamente comece a desenhar várias delas passando pelos dois pontos colocados pelo professor. Uma vermelha, outra azul, outra amarela e assim por diante. Todas superpostas. Também podemos imaginar que o aluno trace várias retas, passando pelo primeiro ponto, em diversas direções e, em seguida, comece a desenhar outras, passando pelo segundo ponto. Por que o aluno deveria espontaneamente desenhar uma *única* reta?

No entanto, o professor de geometria imediatamente corrigirá seu aluno: é evidente que existe apenas uma única reta que satisfaz a ordem, "trace uma reta por estes dois pontos!". Ou então, se quisermos imaginar o professor construtivista, este não verá um *erro* cometido pelo aluno, mas sim, uma hipótese que deverá ser sucessivamente reformulada por ele, até que ele se convença de que, na verdade, só é possível traçar uma *única* reta passando pelos pontos dados. Nosso objetivo a partir deste simples exemplo é refletir sobre as seguintes questões: trata-se, nestes casos, de um processo de *convencimento*? Caso afirmativo, este enunciado matemático refere-se a uma evidência a ser verificada pelo aluno? Quais então seriam os critérios para esta verificação, empíricos ou mentais?

A partir de algumas ideias da segunda fase do pensamento do filósofo austríaco Wittgenstein, defenderei que o processo de aprendizagem de enunciados matemáticos é bastante complexo e, fundamentalmente, trilha um caminho bem diferente dos que as questões levantadas acima nos induzem a percorrer. Como talvez nosso filósofo observasse, trata-se de falsas questões, e tentar respondê-las apenas nos leva a imagens[3] que fixam nosso pensamento em uma única direção. Proponho, então, iniciarmos com uma reflexão sobre a natureza do enunciado, "por dois pontos só é possível traçar uma única reta." Qual é o *uso* que estamos fazendo dele? Estaríamos descrevendo algo evidente diante de nós, ou estamos apenas dizendo o que *deve* ocorrer?

Como nos alerta Wittgenstein, "não pense, mas *olhe*!" (IF § 66), ou seja, não elabore teorias metafísicas, mas veja como de fato empregamos nossas expressões linguísticas. Se seguirmos esta sua recomendação, veremos que estamos usando a expressão em questão com uma função *normativa*, ou seja, por dois pontos quaisquer, *deve* passar uma única reta. Trata-se, portanto, recorrendo à terminologia do filósofo, de uma proposição *gramatical*, e não empírica. Em que sentido Wittgenstein faz esta distinção?

As proposições empíricas descrevem algo no mundo, por exemplo, quando digo "está fazendo sol lá fora". Basta olharmos pela janela e verificamos o valor de verdade deste enunciado. No entanto, segundo o filósofo, há proposições cujo valor de verdade não convém verificar, porque elas têm uma outra função, a saber, a de norma a ser seguida, análoga à de uma regra ou de uma ordem. O geômetra euclidiano não consegue imaginar o contrário do que está sendo afirmado, a saber, de que seria possível traçar mais do que uma reta por dois pontos dados. Não cabe verificar a proposição euclidiana, e nem se concebe a possibilidade de pensar o contrário disso: *deve* ser assim. Enfim, não só este enunciado específico, mas todos os enunciados da geometria e, mais amplamente, da matemática são vistos por Wittgenstein como tendo um uso *gramatical*, e não empírico, *no interior destes contextos de uso*.

[3] Passarei a utilizar o termo "imagem" no sentido técnico de Wittgenstein, a ser explicitado adiante.

A imagem referencial da matemática

Não fazer a distinção acima, segundo Wittgenstein, pode levar a uma série de confusões. Vejamos como isto ocorre no campo da educação matemática. Partirei do princípio de que toda prática pedagógica está ancorada em alguma teoria do conhecimento, e é aqui, a meu ver, que se situa a origem da maior parte dos equívocos. A concepção de matemática predominante no contexto escolar é tributária de epistemologias idealistas, realistas e mesmo empiristas, em que o matemático é visto como um descobridor de verdades matemáticas pré-existentes em um reino ideal, ou então, passíveis de serem extraídas da observação empírica. Como se o significado dos objetos matemáticos tivesse uma *referência* em algum destes reinos, ideal ou de natureza empírica (GOTTSCHALK, 2014).

Por exemplo, é como se os conceitos de ponto, reta, número, variável, triângulo, quadrado, função etc., como também as relações entre eles, tivessem como referência entidades abstratas que, do mesmo modo que foram descobertas pelo matemático através de um processo de investigação formal, seriam passíveis de observação em níveis mais elementares pela criança. Esta deveria ser capaz de observar a existência de uma única reta passando por dois pontos, como se tratasse meramente de uma observação empírica, reflexo de *algo* que ocorre idealmente em um outro reino, que ainda está sendo desbravado pelos matemáticos.

Independentemente da teoria de conhecimento matemático eventualmente envolvida, o que pretendo explorar é a consequência da ideia de que o significado de um objeto ou expressão matemática tenha sempre uma referência extralinguística, ou seja, do mesmo modo que, ao dizer que esta mesa tem quatro pés (e aponto para uma determinada mesa), dizemos que o quadrado desenhado na lousa tem quatro lados, como se ambas as afirmações fossem de mesma natureza (descritiva). Bem, o que quero chamar a atenção é que podemos de fato imaginar a existência de uma mesa empírica que não tenha quatro pés, ou mesmo que não tenha pé nenhum (pode ser fixada em uma parede); mas, quando digo "um quadrado é um polígono que tem quatro lados" não estou descrevendo um quadrado, mas sim, dizendo *o que deve ser um quadrado*. Com isto, não estou afirmando que, talvez, o quadrado não tenha quatro lados, mas três, ou mesmo nenhum. Pelo contrário, através deste enunciado, o professor de matemática está introduzindo um novo paradigma na linguagem, está dizendo *o que é ser* um quadrado.

A matemática lança paradigmas na linguagem

A palavra "paradigma" é definida pelo filósofo Arley Ramos Moreno como sendo "uma técnica de uso da linguagem em que são ativadas palavras e objetos previamente organizados através de outras técnicas" (MORENO, 1995, p. 18). No caso das figuras geométricas, ao desenhar na lousa um quadrado proferindo-se simultaneamente a proposição "um quadrado é um polígono de quatro lados iguais", o professor está introduzindo um paradigma na linguagem. O quadrado desenhado não é um objeto empírico qualquer, trata-se de uma amostra do que *deve ser* um quadrado na geometria euclidiana. O professor utiliza-se de técnicas, como a do desenho, recorre ao objeto régua para traçar retas que passam por pontos equidistantes entre si, enfim, recorre a técnicas de mensuração e a objetos ligados a elas para introduzir um novo conceito na linguagem: no caso, o conceito de quadrado.

É importante notar que o quadrado desenhado na lousa pelo professor *não* é o *significado* de quadrado, mas apenas um elemento auxiliar para que o aluno aprenda a seguir a regra de como aplicamos a palavra "quadrado" no contexto da geometria. Tampouco faz sentido dizer que a definição concomitante de quadrado proferida pelo professor está *descrevendo* o quadrado esboçado na lousa, que aludiria, por sua vez, a um quadrado em um mundo ideal que seria a referência última da palavra quadrado. Este esboço de quadrado acompanhado dos dizeres do professor, *no contexto da aula de geometria*, pode ser visto como uma técnica que produz um novo conceito, um novo paradigma na linguagem. Desta perspectiva da linguagem, o desenho do quadrado entra na linguagem como *meio de apresentação* da palavra e, portanto, já *faz parte da linguagem*. Em outras palavras, o quadrado desenhado torna-se uma regra/norma para o uso da palavra "quadrado".

No entanto, após um período de tempo, relevamos as mediações realizadas pela linguagem e passamos a ver imediatamente figuras quadrangulares, como se estas fossem *observações* extraídas do nosso mundo sensível. Não nos damos conta de que, na formação do conceito de quadrado, e de qualquer outro conceito de nossa linguagem, várias práticas linguísticas estão envolvidas. Este fato talvez explique as conclusões platônicas e essencialistas a que chegamos, ao desconsideramos as práticas inerentes aos diversos usos de nossos conceitos.

O próprio Platão, curiosamente, em uma passagem emblemática do diálogo *Mênon*, parte do conceito de quadrado para demonstrar sua Teoria da Reminiscência, base para sua posterior Teoria das Ideias, endossando a vertente dogmática do conhecimento de que somos tributários. Com a finalidade de provar a primeira formulação de sua teoria do conhecimento, em uma certa altura daquele diálogo, o personagem de Sócrates conduz um escravo de Mênon, que nunca havia tido nenhuma aula de geometria anteriormente, a uma demonstração geométrica do teorema de Pitágoras. Assim, teria demonstrado sua teoria da reminiscência, na qual postulava que teríamos potencialmente em nossas almas conhecimentos absolutos e verdadeiros, mas que teriam sido esquecidos no trajeto percorrido pelas almas, em sua transmigração do reino de Hades[4] até sua nova incorporação terrena (PLATÃO, 81b). Aprender, portanto, seria apenas relembrá-los através de um método dialético, ou seja, através de perguntas e respostas.

Nesta passagem do diálogo em que o escravo é levado a demonstrar o teorema de Pitágoras, a primeira pergunta que Sócrates endereça ao escravo (após ter-se certificado de que o escravo sabia falar grego), antes mesmo de iniciar a demonstração do teorema, é a seguinte (desenhando simultaneamente um quadrado, provavelmente no chão): "Dize-me aí, menino: reconheces que uma superfície quadrada é desse tipo?" (PLATÃO, 2001, 82b). E a partir da resposta afirmativa do escravo, procede à demonstração do teorema.

Para um olhar mais incauto, surpreendentemente, aquele escravo que nunca havia tido qualquer aula de geometria vai gradualmente estabelecendo conexões até que soluciona o problema geométrico, reproduzindo, ao final, uma das demonstrações geométricas já conhecidas do teorema de Pitágoras. No en-

[4] O reino dos mortos, um lugar celestial.

tanto, se retomarmos nosso olhar microscópico, como dito acima, a ideia de quadrado não é algo exterior à linguagem que seria naturalmente apreendida através de observações empíricas. A própria possibilidade de observamos figuras quadrangulares no cotidiano decorre do domínio deste conceito. Aprendemos a empregar a palavra "quadrado' em diferentes situações de uso na linguagem, até que, a partir de um certo momento não previsível, passamos a organizar nosso mundo sensível através deste conceito: sabemos distinguir o que é, e o que não é, uma figura quadrangular. Um quadrado difere de um triângulo, de um círculo, de uma elipse..., enfim, gradualmente formamos dentro de nós uma gramática das figuras geométricas, não de modo estanque, mas comportando suas diferentes relações internas e mesmo entre si. Por exemplo, um quadrado pode ser visto como um retângulo de lados iguais. Um círculo é uma elipse cujo eixo maior coincide com o seu eixo menor. Todas estas figuras têm áreas que podem ser calculadas através de diferentes métodos. E, assim, vai-se constituindo um conjunto de regras de natureza *convencional* que aprendemos a seguir e que passamos a denominar de axiomas, postulados, ou seja, surgem novos paradigmas da linguagem que, encadeados de determinadas formas, produzem novos objetos matemáticos, como, por exemplo, o teorema de Pitágoras.

A confusão se dá quando se considera que a criança, como no caso do escravo de Mênon, estivesse de certa forma rememorando algo já existente potencialmente em suas estruturas cognitivas, "reconhecendo" propriedades naturais destes conceitos, tais como "só é possível traçar uma única reta entre dois pontos dados". Como se os objetos desenhados ou apontados fossem o significado do que é dito, externo à linguagem. Caberia à criança descobri-los, antes mesmo que o professor colocasse as devidas "etiquetas" sobre eles: este é um quadrado, este é um triângulo, este é um círculo... Na verdade, o que Wittgenstein nos mostra é que estes conceitos e suas relações já são dadas *na* linguagem. Os objetos e desenhos empíricos a que recorremos para introduzi-los são incorporados na linguagem como amostras, como paradigmas, ou seja, como *instrumentos linguísticos*, que serão as condições de sentido de posteriores descrições. Por exemplo, suponhamos que um aluno diga que traçou uma reta vermelha passando pelos pontos A e B. Neste caso, temos agora uma descrição, mas que pressupõe que a criança tenha seguido *a regra* de que "só é possível traçar uma única reta por dois pontos quaisquer" e que já saiba aplicar os conceitos de ponto e de reta. A regra em si não descreve nada, apenas é *condição* de descrição.

O que gostaria de ressaltar é que estas regras são *aprendidas*, e não descobertas como ocorre nas ciências naturais. São convenções envolvidas com determinadas práticas, constituindo o que Wittgenstein irá denominar de "jogos de linguagem". Dentre os exemplos que o filósofo nos dá de "jogo de linguagem" e que, de certa forma, também fazem parte do ensino de matemática, temos os seguintes: "ordenar e agir segundo as ordens" e "resolver uma tarefa de cálculo aplicado" (IF §23). Neste sentido, poderíamos dizer que tanto a ordem do professor para que o aluno trace uma reta passando por dois pontos, como a passagem em que Sócrates conduz o escravo a resolver o problema pitagórico que envolve a noção de quadrado e de suas propriedades seriam ambos exemplos de jogos de linguagem, entre vários outros, que poderíamos arrolar no contexto formal do ensino de matemática. Nestes jogos de linguagem, como dirá Wittgenstein em seus últimos escritos no *Da Certeza*: "Não são os axiomas isolados que me parecem óbvios, é um sistema em que as conclusões e as premissas se apoiam *mutuamente*. " (DC §142)

Em outras palavras, é no interior dos jogos de linguagem da matemática que o aluno vai adquirindo convicção de seus axiomas e das conclusões que são deduzidas a partir deles, não há uma evidência *a priori* de determinados enunciados. Embora para o professor de geometria seja evidente que "por dois pontos quaisquer, só é possível traçar uma *única* reta"; para o aluno, haveria várias ações possíveis diante da ordem dada. Para quem está aprendendo, traçar uma reta pelos pontos dados é *uma* entre várias outras possibilidades, como vimos inicialmente. Aquela afirmação é uma evidência para o professor, e não para o aluno.

> Evidência certa é a que *aceitamos* como certa, é a que nos orienta quando agimos com certeza sem *quaisquer* dúvidas.
>
> O que chamamos "erro" desempenha um papel muito especial nos nossos jogos de linguagem, e o mesmo acontece com o que consideramos evidência certa. (DC §196).

Assim, não se trata de convencer o aluno que tem diante de si uma evidência matemática, mas sim, de *persuadi-lo* a aceitar um determinado uso de uma palavra ou expressão linguística no contexto específico da geometria euclidiana. Neste contexto, *é assim que agimos*. Portanto, não se trata de um erro ou de uma hipótese que ainda está sendo reformulada pelo aluno, e que gradualmente se aproximará desta "verdade", simplesmente estamos diante de uma regra de natureza convencional, que *aprendemos* a seguir. E, na maior parte das vezes, este aprendizado se dá através de um treino, em que vários exemplos de como proceder nestas situações são apresentados ao aluno, até que esta regra se torna, como diz Wittgenstein, um princípio de juízo.

Já no caso da demonstração matemática, em que determinados paradigmas já foram introduzidos aos alunos, estamos diante de uma técnica que *produz* novos significados linguísticos por meio de *convencimento*. Para usar uma expressão corrente dos matemáticos, somos convencidos *inexoravelmente* pela prova matemática. Como explicar isso? Enquanto a técnica de apresentação de paradigmas é apenas um estágio preparatório para o efetivo uso dos conceitos aprendidos, persuadindo-se o aluno a aceitá-los, as demonstrações matemáticas nos convencem de novas proposições, que uma vez provadas adquirem o status de teoremas.

Mas poderíamos imaginar que alguém questionasse a distinção entre a introdução de paradigmas e o estágio posterior da prova matemática. Não se trataria de um mesmo processo argumentativo? Não haveria casos em que nos convencemos imediatamente de determinadas afirmações da lógica ou da matemática, independentemente de terem sido provadas? Vejamos como Wittgenstein retoma esta questão e como a reponde em seguida:

> "Se a demonstração nos convence, então também temos de estar convencidos dos axiomas". Não do modo como estamos convencidos das proposições empíricas; não é este o seu papel. Eles estão excluídos do jogo de linguagem da verificação pela experiência. Não são proposições da experiência, mas sim, princípios de juízo.
>
> Um jogo de linguagem: Como hei de imaginar um jogo de linguagem no qual ocorram axiomas, demonstrações e proposições demonstradas?
>
> Quem na escola ouve pela primeira vez algo sobre a lógica convence-se imediatamente quando alguém lhe diz que uma proposição implica a si mesma, ou quando ouve o princípio de contradição, ou o do terceiro excluído. – Por que se convence imediatamente destas coisas? Bem, estas leis se acomodam

> perfeitamente no uso da linguagem que lhe é tão familiar.
>
> Então, aprende, por exemplo, a demonstrar proposições mais complicadas da lógica. Ensinam-lhe as demonstrações e volta a se convencer; ou ele mesmo inventa uma demonstração. (OFM, Parte VII, §73)[5]

Como observa Wittgenstein, a própria linguagem natural abriga determinados princípios matemáticos, daí alguns de nossos axiomas nos parecerem evidentes, como, por exemplo, o princípio da lógica de que "todo objeto é idêntico a si próprio" e que pode também ser expresso como "A = A". Este princípio atua na linguagem do cotidiano, aprendemos que, se um determinado objeto é uma cadeira, inferimos imediatamente que não é uma mesa, ou um tapete, ou outro objeto qualquer. Uma cadeira não pode ser, e não ser, uma cadeira. Uma cadeira é uma cadeira. Isso significa que nossos jogos de linguagem se inter-relacionam, o que possibilita, inclusive, um uso empírico da matemática. No sentido inverso, a própria técnica da contagem, por exemplo, já está presente em nossas atividades cotidianas, antes mesmo de a criança ir para a escola. Assim, algumas das técnicas e conceitos aprendidos informalmente passam a desempenhar um papel crucial no aprendizado da matemática escolar. Aprender que uma equação de segundo grau comporta duas soluções possíveis pressupõe saber contar até dois, mesmo que o sentido atribuído ao número de soluções da equação tenha sido obtido através de outras técnicas mais sofisticadas, como a fórmula de Bhaskara. Em outras palavras, estas diferentes técnicas se conectam e produzem novos conceitos. Neste sentido, a demonstração matemática envolve diversas técnicas, que se relacionam internamente com os axiomas e com a proposição demonstrada, resultando no fato de que: "A imagem (imagem da demonstração) é um instrumento de convencimento." (OFM §72).

No entanto, embora nossa convicção possa estar ancorada em determinados usos da linguagem ordinária, com o tempo, os enunciados matemáticos adquirem autonomia em relação à experiência empírica. Se o aluno é persuadido a aceitar determinadas regras como válidas no interior dos jogos de linguagem da matemática, passa então a ser capaz de jogar o jogo, independentemente do que ocorre efetivamente no mundo empírico. Se estabelecermos uma analogia da linguagem matemática com o jogo de xadrez, é como se o aluno tivesse que aprender a posição das peças de xadrez e suas regras para que, em um segundo momento, possa de fato fazer os lances, convictamente. Estes diferentes momentos não se dão necessariamente de modo cronológico[6], mas logicamente, o primeiro momento é condição para a atribuição de significados aos nossos conceitos. É nele que são introduzidos os paradigmas da nossa linguagem. Segundo Moreno (1995):

> A técnica de apresentação de paradigmas é uma etapa de "preparação" (*Vorbereitung*) para o uso das palavras porque os paradigmas indicam apenas o lugar das palavras nos jogos de linguagem e não tudo o que se pode fazer com elas. A apresentação de paradigmas corresponde a uma técnica elementar ou, como diz Wittgenstein, "primitiva"; atribui-se nomes aos objetos (...). A introdução do lugar de uma palavra através de um paradigma não é, ainda, um "movimento no jogo de linguagem" (*ein Zug im Sprachspiel*) uma vez que apenas com nomes não podemos "falar das coisas" e nem "descrevê-las"; com o paradigma tudo o que fazemos é colar "etiquetas" nos objetos. (p. 21)

[5] Traduzido livremente do alemão.

[6] Podemos também aprender a seguir as regras *a parte post*, ou seja, ao longo do jogo em que estamos sendo introduzidos, imersos em uma forma de vida. No caso da matemática, esta situação é mais difícil de ocorrer, na medida em que seus objetos e modos de operar, na maior parte das vezes, não estão presentes na linguagem natural.

Por exemplo, a barra de platina conservada no vácuo que é a referência do metro-padrão passa a ser *condição* para que possamos descrever o comprimento de determinados objetos, mas não faz sentido dizer que esta barra de platina mede um metro, na medida em que ela própria *é o* critério para que outros objetos sejam medidos, apenas "prepara o terreno" para que o jogo da mensuração propriamente dito se inicie. Analogamente, os axiomas e os conceitos matemáticos fariam parte de jogos preparatórios, cabendo ao professor persuadir o aluno a aceitar o novo lugar de determinadas palavras e suas regras de uso, antes que ele comece de fato a "jogar". Lembrando que, mesmo neste primeiro nível, são empregadas diversas técnicas, ou seja, a ligação entre signo e objeto não são imediatas, e sim, mediatizadas por elas. Aponta-se para uma imagem na lousa, recorre-se a técnicas de contagem e de mensuração, enfatiza-se uma determinada interpretação do enunciado matemático, enfim, faz-se um uso *normativo* do paradigma introduzido: deve ser assim. Do mesmo modo que o metro-padrão diz o que é ser um metro, os demais paradigmas linguísticos dizem como operar com determinadas palavras em seus respectivos jogos. No entanto, ainda não é neste nível, propriamente, que surgem as imagens que nos levam a interpretações dogmáticas da atividade matemática, mas sim, ao longo do processo do uso das palavras já no interior de seus diversos jogos de linguagem, quando os "lances" passam a ser confusamente interpretados como acompanhados de um ato especial de apreensão dos seus significados.

Imagens dogmáticas e suas repercussões pedagógicas

Como vimos, os conceitos na matemática desempenham o papel de normas, regras que determinam nossa ação de modo preciso, em contraposição aos conceitos da linguagem ordinária, que são vagos e que comportam uma multiplicidade bem maior de ações possíveis. Esta maior precisão dos conceitos matemáticos conduz, por vezes, a determinadas imagens, no sentido de estas expressarem interpretações de enunciados que "giram no vazio", causando não só confusões de natureza filosófica, mas também no campo educacional. Vimos que um dos exemplos de jogo de linguagem apresentado por Wittgenstein no parágrafo 23 das IF era o de "resolver uma tarefa de cálculo aplicado". A partir do parágrafo 143 desta mesma obra, o filósofo nos fornece alguns exemplos deste tipo de jogo de linguagem na matemática, dentre os quais, a atividade de prosseguir determinadas sequências de números a partir de uma ordem, como "some 2!", ou a partir de uma fórmula algébrica. Embora o filósofo esteja mais preocupado em fazer a crítica do conceito de compreensão como processo mental, estes exemplos são preciosos para o esclarecimento de como determinadas imagens surgem na atividade da matemática.

Consideremos, então, o caso de um aluno que já domine a sequência dos números naturais e tenha também aprendido a escrever outras sequências, como, por exemplo, ao ouvir uma ordem da forma "+ n", ele escreve sequências da forma 0, n, 2n, 3n ... até chegar ao número 1000 (IF §185). Seu professor, então, conclui que este aluno já compreende a ordem de tal modo que, não importa o número que seja pronunciado a partir de 1000, automaticamente o aluno saberia escrever o próximo número da sequência. Suponhamos que n seja igual a 2, portanto a ordem, "some 2!" levaria o aluno após o número 1000 a escrever necessariamente 1002, como se esta passagem já estivesse de algum modo na sua mente, embora apenas potencialmente, antes de ser efetivada. No entanto, Wittgenstein faz a seguinte observação a esta concepção analítica do significado, pressuposta na atitude deste professor:

> Neste ponto, gostaria de dizer, primeiramente: Sua ideia foi que o ter a ordem em mente já fez, a seu modo, todas as passagens: no ter-em-mente, seu espírito voa, por assim dizer, à frente, e faz todas as passagens antes de você chegar com seu corpo a esta ou àquela passagem[7].
>
> Você estava, portanto, inclinado a expressões como: "As passagens já estão *propriamente* feitas; mesmo antes de eu fazê-las por escrito, verbalmente ou em pensamento." Era como se fossem pré-determinadas, antecipadas, de uma forma *singular*- como só o ter-em-mente pode antecipar a realidade. (IF §188)

Nesta concepção mentalista criticada por Wittgenstein, é como se a ordem contivesse misteriosamente todas as suas possíveis aplicações, produzindo todos os elementos da sequência de modo antecipado, ou ainda, como se todas as passagens realizadas fossem *determinadas* pela ordem, ou por alguma fórmula algébrica. Assim, a ordem '+ 2' determinaria plenamente (para pessoas treinadas pela educação) cada passagem de um número para o número seguinte, inexoravelmente. No entanto, a expressão, "o aluno ao receber a ordem ' +2' saberia que *seria preciso escrever 1002 após 1000* pode ter mais do que uma interpretação: uma interpretação usual, e outras que se cristalizam em imagens que nos conduzem a dificuldades insolúveis e que, a meu ver, também podem levar a situações problemáticas em nossas práticas educacionais. Vejamos como isto se dá.

Segundo Moreno, a expressão acima de que, dada a ordem ' + 2' o aluno saberia escrever 1002 após 1000, é empregada normalmente no cotidiano sem qualquer problema, quando interpretada da seguinte forma: as pessoas que aprenderam a técnica de cálculo obtêm, todas, os mesmos resultados, quando aplicam a fórmula algébrica em questão, mas não aquelas que não aprenderam a técnica. Assim, se alguém tivesse colocado a questão acima [some 2!], a um aluno que dominasse a técnica de cálculo, ele seria capaz de responder corretamente. Porém, a partir daquela mesma expressão, algumas imagens podem ser construídas, quando a reformulamos de modo confuso, como, por exemplo, ao dizermos, "a expressão algébrica é uma significação que *antecipa* a realidade: ela *realiza* todas as passagens de uma 'maneira particular'", ou então, "ao dar a ordem '+2', meu pensamento *realiza* efetivamente todas as passagens numéricas, *independentemente* de sua realização empírica" (MORENO, 1995, p. 34). E é neste momento que surgem as dificuldades, quando passamos a procurar *de que modo* as fórmulas algébricas realizam idealmente todas as passagens (e desconsidera-se as situações efetivas de aplicação da fórmula), como se o pensamento apreendesse "de um só golpe" todas estas aplicações (IF §191).

Assim, ao não se conseguir apresentar nenhum modelo que explique estes processos misteriosos, estas imagens fazem proliferar outras, pressupondo-se, por exemplo, a existência de estruturas cognitivas no aluno que teriam um desenvolvimento *a priori* (como postula o construtivismo piagetiano), ou mesmo supostos processos psíquicos ainda a serem desvendados pelas ciências cognitivas, como supõe Philippe Perrenoud[8] ao propor uma "pedagogia das competências". Tendo como finalidade elaborar um inventário

[7] O termo em alemão é *Meinen*, que tem sido traduzido para o português como "ter em mente". No original: "(...) deine Seele fliege beim Meinen, gleichsam, voraus und mache alle Übergänge, ehe du körperlich bei dem oder jenem angelangt bist"".

[8] Philippe Perrenoud colaborou como assessor dos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN) na década de 90, e suas obras publicadas no Brasil ainda têm enorme influência nas diretrizes e políticas educacionais em vigor, a exemplo do *Exame Nacional do Ensino Médio* (ENEM), cuja matriz é elaborada tendo como base a "pedagogia das competências".

das competências que preconiza que sejam mobilizadas na criança, em sua obra, *Construir as competências desde a escola*, o sociólogo chega a afirmar peremptoriamente que "é preciso formar uma ideia do que ocorre na *caixa-preta* das operações mentais, mesmo com o risco de que não passem de representações metafóricas no estágio das ciências da mente" (1999, p. 20, grifo do autor). Estas concepções mentalistas do significado têm levado os educadores a pressupor um mundo interno na criança a ser mobilizado, ao qual só ela própria tem acesso, como se houvesse algo de oculto na nossa interioridade, um suposto privilégio do interno sobre o externo. Entretanto, as observações de Wittgenstein sobre a linguagem nos mostram que o que nos parece inapreensível é apreensível *na medida em que passamos a descrever como aplicamos nossas palavras*. E esta aplicação não se reduz à descrição de fatos empíricos, passíveis de verificação. Conhecer algo, compreender uma ordem, prosseguir uma sequência numérica, entre outras atividades, é também ser capaz de dominar determinadas técnicas, *para além do uso referencial das palavras ou de eventuais processos psíquicos que possam acompanhá-las*:

> Passamos a ver, claramente, que a verdade e a necessidade dos enunciados matemáticos não exprimem fatos nem essências matemáticas. Exprimem, pelo contrário, nossa "atitude" (*Einstellung*) em face de técnicas de cálculo e ao uso que fazemos dos números. Passamos a ver que a necessidade de "2 + 2 = 4" é relativa a um sistema preciso de convenções aceitas consensualmente, e que essas convenções desempenham papéis importantes em nossa vida: elas permitem, por exemplo, que se espere com certeza a repetição de um mesmo resultado – sem que, para isso, seja preciso postular princípios *a priori* organizadores da experiência e nem uma "crença" (*belief*) irracional como fundamento do conhecimento científico. (MORENO, 1995, p. 39)

Vejamos, então, como esta concepção de significado matemático de inspiração wittgensteiniana pode prevenir confusões no ensino e na aprendizagem de seus conteúdos.

Ensino e significado

> Estou fazendo psicologia infantil? – Estou fazendo a ligação entre o conceito de ensino e o conceito de significado.
>
> (WITTGENSTEIN, F§412)

Como um dos resultados das observações acima (e não como tese a ser defendida), chamo a atenção para o papel crucial do professor para que o aluno adquira um novo conhecimento de modo significativo. Retomando os exemplos iniciais, quando o professor pede ao aluno que venha até a lousa e "trace uma reta passando por estes dois pontos", ou que reconheça a figura de um quadrado, ou ainda, que continue uma sequência numérica a partir de uma fórmula algébrica, a expectativa deste professor pode conduzir a pelo menos duas situações, com consequências bastante distintas.

Primeira. O professor espera que seu aluno apreenda estes significados naturalmente, bastando, para isto, propiciar situações de aprendizagem que conduzam à reformulação de suas hipóteses iniciais, até que o aluno passe a agir como esperado. No entanto, na realidade concreta da sala de aula, o que tem ocorrido é que o aluno passa a tentar "adivinhar" o que este professor espera dele. E, mesmo que acerte casualmente, não adquire a segurança necessária para tentar novos lances nos jogos de linguagem a que está sendo introduzido.

Segunda. Antes de propor qualquer uma das atividades acima, o professor introduz o aluno aos conceitos fundamentais da geometria euclidiana, tais como o de ponto, reta, plano e algumas de suas relações (retas paralelas entre si, concorrentes, perpendiculares...), através de diversos exemplos e recorrendo a diferentes técnicas de mensuração (como usar a régua, o compasso, o que significa "ligar dois pontos" através de uma reta etc.), até que o aluno domine satisfatoriamente estes novos instrumentos da linguagem. Obviamente, "ligar dois pontos" pode ter sentidos para o aluno muito diferentes do que para seu professor. Pode significar, por exemplo, apenas juntá-los, entre outras possibilidades. A linguagem ordinária permite um campo de aplicações dos conceitos com limites que admitem uma vagueza muito maior do que os dos conceitos bem mais precisos da matemática. Portanto, estas novas técnicas devem ser mostradas ao aluno de algum modo e, por vezes, *explicitadas*. Assim, de posse de parte delas (onde o critério quantitativo é apresentar um número *suficiente* delas), inicia-se um treino no qual o aluno começa a aprender a "jogar" efetivamente, em que haverá erros e acertos, sendo que seu aprendizado dependerá muito mais de seus erros do que de eventuais acertos. Aprende-se o que se espera que seja feito, na maior parte das vezes, aprendendo-se o que *não* se espera.

Um exemplo paradigmático é o aprendizado das cores. Quando se ensina a uma criança pequena as cores, começa-se apontando para algumas delas e pronuncia-se ao mesmo tempo o nome de cada uma, introduzindo-se estes paradigmas na linguagem. Cada cor apontada passa a desempenhar o papel de amostra, a qual é incorporada pela linguagem através da técnica do gesto ostensivo. Podemos imaginar que, em seguida, supondo-se que já tenha o conceito de cor, a criança também aponte para uma série de outros objetos e pergunte, ao ver um objeto laranja, "isto é vermelho?" e, em outro momento, ao ver um objeto rosa "e isto, é vermelho?"; e assim por diante, até que, a partir de um determinado momento, passa a ser capaz de aplicar esta palavra como foi convencionado em nossa forma de vida. Portanto, o momento inicial de apresentação dos paradigmas é condição para que se *compreenda* o que é e o que não é vermelho. Até que passamos imediatamente a ver vermelho, azul, amarelo, ou qualquer outra cor, como se fosse algo natural e espontâneo.

> Começar por ensinar a alguém "Isto parece vermelho" não tem sentido. Tem de o dizer espontaneamente quando tiver aprendido o que significa "vermelho", isto é, quando tiver aprendido a técnica de utilizar a palavra vermelho. (F § 418)
>
> Toda a explicação tem seu fundamento no treino. (Os educadores deveriam se lembrar disto.) (F § 419)
>
> "Parece-me vermelho" – "E com que se parece vermelho?" – "Com isto". Aqui tem de indicar-se o paradigma correto. (F § 420)

Do mesmo modo, aprendemos as técnicas para o aprendizado de objetos matemáticos e suas relações. Após um certo período de treino, que introduz novos paradigmas, também aprendemos a ver imediatamente pontos, retas e *o modo como o professor aplica estes conceitos no enunciado* "por dois pontos só é possível traçar uma única reta". Este olhar, digamos, "microscópico", pode ser estendido às demais técnicas, cada vez mais complexas, em que o significado das proposições será dado *pelo modo* que são demonstradas e aplicadas, no interior dos jogos de linguagem da matemática. Daí a afirmação esclarecedora de Wittgenstein na epígrafe acima, apontando para a ligação *interna* entre o conceito de ensino e o conceito de significado. Não há um significado mais essencial, ou mais exato; todo sentido é tributário de um modo de operar com ele, nos diferentes jogos de linguagem.

***

Desta perspectiva wittgensteiniana, dissolvem-se as imagens de que haveria algo "peculiar" nas fórmulas algébricas que determinam a ação em uma única direção, ou na imagem de que o pensamento apreende de uma só vez todas as aplicações corretas de uma palavra ou fórmula matemática. Não há hierarquias entre os diferentes jogos de linguagem, apenas aplicamos as palavras com diversas funções. No caso dos jogos de linguagem da matemática, seus enunciados são empregados com força normativa, *deve ser assim*. As confusões surgem quando passo a supor que estes enunciados possam estar se referindo a algo extralinguístico, como entidades de um universo matemático ou de um estado mental característico. Ao não encontrar modelos nas ciências que deem conta de descrever seu funcionamento, digo, então, "que essa dificuldade é provisória, e remeto a solução para um momento futuro em que, por exemplo, o conhecimento do cérebro e do sistema nervoso será mais completo" (MORENO, 1995, p. 37-38) e, assim, nessa etapa futura, crê-se que será encontrada a verdadeira ligação entre nossos conceitos mais fundamentais e sua correspondência com determinadas redes neuronais.

Enfim, novas mitologias vão sendo criadas, naturalizando-se processos que são de natureza convencional e produzindo-se confusões em nossas práticas pedagógicas. Esquece-se, assim, de que o homem é essencialmente um inventor que cria necessidades, através de técnicas linguísticas tais como a criação contínua de novos paradigmas que possibilitam, cada vez mais, a ampliação dos sentidos que atribuímos ao mundo. Tal como faz o matemático.

Referências

GOTTSCHALK, C. M. C. Fundamentos filosóficos da matemática e seus reflexos no contexto escolar. **International Studies on Law and Education**, 18, set-dez., 2014, pp.73-82.

MORENO, A. R. **Wittgenstein**: através das imagens. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

PERRENOUD, P. **Construir as competências desde a escola**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PLATÃO. **Mênon**. Tradução de Maura Iglésias. São Paulo: PUC, 2001.

WITTGENSTEIN, L. **On certainty**. Oxford: Basil Blackwell, 1979.

WITTGENSTEIN, L. **Fichas** (Zettel). Lisboa: Edições 70, 1981.

WITTGENSTEIN, L. **Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik**. Frankfurt amMain: Suhrkamp, 1989.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações filosóficas**. Trad. Marcos Montagnoli. Petrópolis, RJ: Vozes, 1996.